Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2021

Lineare Algebra II
Blatt 8
Abgabe: 28.06.2021, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**
Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt, welches durch die Quadratische Form

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

eindeutig bestimmt wird, betrachte die Unterräume

$$U_1 = \mathrm{Lin}\big(\{(1,2,3)\}\big) \quad \text{und} \quad U_2 = \mathrm{Lin}\big(\{(1,2,-1),(1,-7,3)\}\big).$$

(a) Berechne explizit die orthogonalen Projektionen $\mathrm{Pr}^{\perp}_{U_1}$ und $\mathrm{Pr}^{\perp}_{U_2}$.

(b) Zeige, dass die Verkettung $\mathrm{Pr}^{\perp}_{U_1} \circ \mathrm{Pr}^{\perp}_{U_2}$ die Nullabbildung ist.

(c) Schließe aus (b), dass $U_1 \perp U_2$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Betrachte im unitären Raum $\mathbb{C}^4$ mit dem Standardskalarprodukt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme die Eigenräume von A. Ist A, betrachtet als reelle Matrix, diagonalisierbar?

(b) Finde eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren.

(c) Zeige mit Hilfe von (a) und Aufgabe 1, dass der von A definierte Endomorphismus $F_A : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ sich als $F_A = \lambda P + \mu Q$ schreiben lässt, für geeignete Skalare λ und μ, sowie orthogonale Projektionen P und Q mit
$$P \circ Q = 0 \quad \text{und} \quad P + Q = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^4}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei U ein Unterraum des euklidischen oder unitären Raumes $(V, \langle - - \rangle)$.

(a) Beschreibe die symmetrische Differenz

$$F(U)^{\perp} \bigtriangleup (F^t)^{-1}(U^{\perp}).$$

(b) Schließe aus (a), dass U genau dann unter F invariant ist, wenn $U^{\perp}$ unter F^t invariant ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.